La utilidad de los numerales gráficos en la resolución de problemas aditivos

MÓNICA ALVARADO* Y NORMA FERNÁNDEZ**

El propósito central del trabajo que a continuación reportamos, fue analizar el impacto de la presencia de numerales escritos en la resolución de problemas aditivos en 45 niños en edad preescolar. Siguiendo con el planteamiento de Tolchinsky (2003), queríamos probar que la presencia de numerales gráficos podría ser de utilidad para los niños que no tenían éxito al enfrentar este tipo de problemas en ausencia de estos apoyos gráficos.

Detrás del planteamiento de nuestros estudios subyace la consideración de que las notaciones numéricas son herramientas para el pensamiento (Karmiloff-Smith, 1994; Martí, 2009; Tolchinsky, 2003) que posibilitan que los niños se involucren en la resolución de problemas, en este caso aditivos, que de otra manera no les serían cognitivamente accesibles. Así mismo, asumimos que los niños pequeños son sensibles a las notaciones y capaces de emplearlas como elementos referenciales a pesar de que su comprensión sobre éstas no sea del todo convencional.

En trabajos anteriores, autores como Carpenter & Moser, 1982; Fuson, 1991 y Gray, 1997, 1991, habían ya incursionado en las posibilidades infantiles del conteo con apoyo de materiales concretos. En general existe consenso entre todos ellos en señalar que las representaciones externas (el empleo de fichas, dedos de las manos, etc.) facilitan las tareas de conteo y pequeñas transformaciones en niños pequeños. Resulta fundamental señalar que, los niños de un medio urbano, además de poder recurrir a herramientas de representación como las antes señaladas, tienen acceso a notaciones convencionales propias de la cultura en la que viven. Al respecto, estudios como los de Alvarado, 2005; Alvarado & Ferreiro, 2002; Sarnecka & Gelman, 2004, Brizuela, 2004 y Lipton & Spelke, 2004, 2005, demuestran el interés genuino de niños por las notaciones numéricas desde muy temprana edad y que, incluso, los lleva a iniciarse en el planteamiento de hipótesis sobre lo que éstas marcas gráficas representan, cuándo se usan, cómo se podrían distinguir de las notaciones que se hacen con letras o incluso, cómo interpretar la escritura de numerales mulltidígitos.

Cabe señalar que aunque en los programas escolares nacionales en México se reconocen las posibilidades preescolares relativas a la adquisición del número de los niños, se posterga el empleo de notaciones convencionales en el planteamiento de problemas numéricos (de conteo) o de aritmética inicial. De esta manera, en el preescolar se privilegia el uso de estrategias informales al resolver problemas: se reconoce al conteo de colecciones (apoyado con los dedos, con dibujos, marcas en el papel, etc.) o a las aproximaciones sucesivas como estrategias de solución a los problemas aditivos. A esta estrategia didáctica subyace la idea de proveer situaciones en las que los niños espontáneamente se acerquen a los problemas aditivos y puedan resolverlos desde sus posibilidades tal y como lo han recomendado diferentes autores (Heibert y Carpenter 1992; Broitman, 1998a; Broitman 1998b; entre otros).

Respecto a los problemas aditivos, Vergnaud (1982) los incluye dentro del campo de las estructuras aditivas y ha establecido que su comprensión se da en un proceso largo de experiencias en las que los niños comienzan a adentrarse hacia los 3 o 4 años de edad y no concluyen hasta los 15 o 16 años. Así mismo, este autor agrupa los problemas aditivos en seis diferentes categorías. Cabe señalar que nuestro trabajo lo hemos realizado sólo a propósito de problemas englobados en la primera categoría. Un ejemplo de problema aditivo de *Categoría I* es el siguiente: *"Pedro tiene 6 canicas en el bolsillo derecho y 8 en el izquierdo. Cuántas canicas tiene Pedro en total?"* (Vergnaud, 1982, p. 43).

Así mismo, algunos estudios como los de Denvir & Brown (1981), Thompson (1995) y Gray (1997) se han centrado en los métodos que los niños emplean en la resolución de operaciones aditivas dando como resultado diferentes taxonomías que coinciden en aceptar que cuando las operaciones involucran un rango menor a 20, se presentan estrategias progresivamente más complejas que aparecen en la siguiente sucesión: contar los elementos involucrados desde "uno" (para el ejemplo anterior esto sería equivalente a proceder en términos de: 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1); contar a partir del conjunto mayor para agregar los elementos, uno a uno, del conjunto menor (siguiendo con el ejemplo esto equivaldría a plantear 8+1+1+1+1+1+1+1); usar el cálculo asumiendo hechos numéricos, para el ejemplo esto podría ser representado por una descomposición de números que lo hiciera más operable del tipo (5+3)+(5+1)= (5+5)+(3+1), o bien (8+2)+4.

SITUACIONES DE INDAGACIÓN

Dentro de nuestro estudio participaron 45 niños (edad promedio 4;7 años) que asistían a una escuela privada de la ciudad de Querétaro, México, a quienes entrevistamos individualmente en dos sesiones de 45 minutos cada una. Las sesiones se realizaron en días diferentes de una misma semana. En la primera sesión cada niño resolvió tareas para verificar su condición de conservación de la cantidad (en términos piagetianos), sus posibilidades de conteo (en un rango del 1–12) y de identificación de numerales gráficos (desde 1 hasta 9).

La segunda sesión estuvo destinada a la tarea central del estudio: la resolución de problemas aditivos (categoría I). Para ello se presentó a los niños una caja opaca y vacía en la que se le mostraba la introducción de fichas en dos momentos diferentes para que, al final, dijera cuántas fichas había en la caja. Esta situación se presentó en dos versiones. En la primera, las transformaciones aditivas (agregados de fichas) se daban sin apoyo de representaciones gráficas numéricas. En la segunda versión, las trasformaciones se acompañaron de la representación de numerales gráficos (del 1 al 9 escritos en tarjetas independientes cada uno) entre los cuales los niños elegían el pertinente de acuerdo con cada momento de la transformación.

Todos los niños fueron expuestos en primer lugar a las transformaciones en ausencia de numerales gráficos y después, resolvieron la versión con apoyo de numerales gráficos. Los niños entrevistados resolvieron problemas, tanto en la primera como en la segunda versión de la tarea, que involucraron las siguientes operaciones: 5+3; 4+6; 3+2; 8+4; 7+3.

RESULTADOS

Condición numérica de los niños

Para evaluar el rango de conteo de los niños de la muestra, se utilizó un juego que consistió en tirar un dado por turnos, entre el niño y la entrevistadora, y posteriormente cuestionar al niño acerca de quién era el ganador.

En el transcurso del juego los niños presentaron dos diferentes tipos de respuestas que nos indican la alta familiaridad de los niños de la muestra con los dados: a) contar los puntos representados en la cara del dado y hacer correspondencia entre fichas y puntos contados (22% de los niños); b) identificar la constelación representada en la cara del dado y tomar las fichas en consecuencia (78% de la muestra). Cabe señalar que los dos tipos de respuestas antes descritas llevaron a los 15 niños de la muestra a resultados exitosos para determinar el número de puntos en la cara del dado y establecer el número correspondiente de fichas a tomar. Así mismo, todos los niños pudieron contar sin dificultad en un rango total de 12 fichas acumuladas a lo largo del juego.

Para la evaluación de numerales gráficos presentamos a los niños unas tarjetas con colecciones de objetos para que colocaran el numeral correspondiente de acuerdo a la cantidad de objetos. Los conjuntos presentados contenían 3, 5, 4, 6, 8 y 1 elementos respectivamente, los cuales fueron elegidos al azar. En la realización de esta tarea, todos los niños lograron contar para relacionar el número de cada conjunto con su correspondiente numeral gráfico.

Si bien las posibilidades de los niños para la identificación de numerales gráficos y el conteo fueron muchas, la condición respecto a la conservación de la cantidad no fue tan avanzada. Para evaluar si los niños de la muestra eran conservadores se utilizó la situación clásica de Piaget y Szeminska (1967) en la cual utilizamos fichas de dos colores diferentes dispuestas en dos hileras (de siete). El problema a resolver, por parte de los niños, era determinar cuál era la hilera con más elementos, luego de hacer variar a la vista del entrevistado, la distancia entre los elementos de cada hilera.

A partir de los trabajos de Greco (1962) se puntualizó tres diferentes maneras de resolver la tarea de conservación de la cantidad. 1) Juicios pre-cuantitativos en los que los niños determinan que la cantidad de elementos ha variado de acuerdo con las transformaciones que sufre la hilera (por ejemplo, los niños decían que tiene más elementos la que en apariencia es más larga). 2) Juicios en transición que se caracterizan por la fluctuación de los niños al emplear tanto criterios pre-cuantitativos y cuantitativos para evaluar la cantidad de elementos de las hileras, lo que los lleva a desarrollar una estrategia denominada "invertibilidad" consistente en corroborar sus respuestas a través del reordenamiento de las hileras haciendo coincidir uno a uno cada elemento. 3) Juicios cuantitativos en los que los niños demuestran haber comprendido que la cantidad de elementos de las hileras no se ve afectada por las modificaciones en el acomodo que sufran.

Entre los 45 niños de nuestra muestra no encontramos quienes presentaran juicios cuantitativos en la resolución de la tarea de conservación de la cantidad. Veinticuatro de ellos (53%) resolvieron la tarea empleando juicios pre-cuantitativos y, el resto (11 niños), juicios en transición.

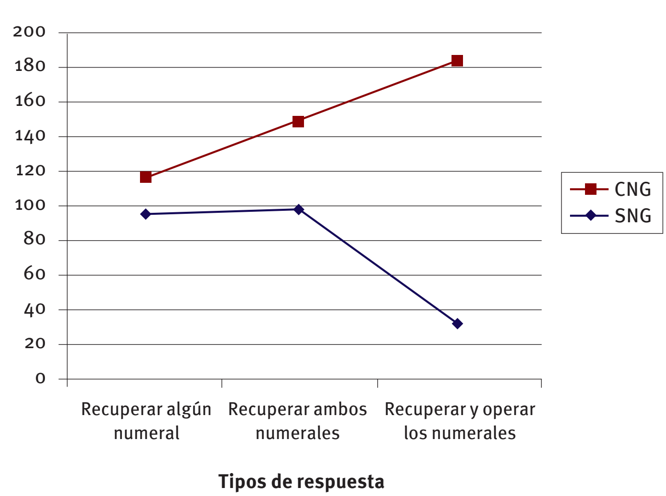
Estrategias empleadas en la tarea de transformación aditiva

A partir de la tarea que involucraba enfrentar problemas aditivos en sus dos variantes, obtuvimos 450 respuestas infantiles que clasificamos en tres diferentes tipos de respuesta:

a. Recuperar el numeral de algún momento del problema. Por ejemplo, después de presenciar la transformación *5+3*, decir que en la caja hay tres fichas, o bien, cinco. Este tipo de respuestas se presentó en el 26% de los casos.
b. Recuperar los numerales involucrados en los dos momentos del problema pero no operarlos. Es decir, responder que hay cinco y tres fichas en la caja después de presenciar la transformación *5+3*. El 33.33% de las respuestas fue de este tipo.
c. Recuperar los numerales involucrados en los dos momentos del problema y operarlos a través de estrategias de conteo que, por lo general, se apoyaban en el uso de los dedos. Este tipo de respuestas si bien podrían resultar correctas (decir que hay ocho fichas después de presenciar la transformación *5+3*) o en próximas, como por ejemplo asegurar que hay en la caja siete o nueve fichas después de la misma transformación. Este tipo de respuestas se presentó en el 40.67% de los casos.

Como lo habíamos anticipado, el tipo de variante de la tarea afectó las respuestas de los niños. Cuando la tarea era acompañada por la identificación de los numerales gráficos (CNG), la mayoría de los niños recuperó y operó los numerales involucrados independientemente del rango numérico involucrado. La Figura 1 resume esta información (con las iniciales SNG se distinguen las respuestas de la variante de la tarea sin empleo de numerales gráficos).

Figura 1 – Frecuencia de respuestas por variante de la tarea



Al parecer, la presencia de notaciones convencionales es la variable que explica con mayor fuerza los resultados de nuestro estudio. Lo podemos afirmar al considerar que, 1) todos los niños podían contar e identificar numerales en un rango al menos del 1 al 12, sin embargo esta posibilidad no tuvo relevancia al enfrentar las transformaciones aditivas en la variante sin soporte en las notaciones numéricas; 2) todos los niños de la muestra, independientemente de no ser conservadores de la cantidad, pudieron ejecutar mejor la tarea aditiva desde la variante apoyada en las notaciones numéricas. Presentamos a continuación un fragmento de entrevista con Josué (4;06) para ilustrar las ventajas que representó el empleo de las notaciones numéricas.

ENTREVISTADORA	JOSUÉ (4;06)
Josué, revisa la caja para ver cuántas fichas tiene.	Ninguna, está vacía.
Muy bien entonces vamos a seguir con el juego. Mira cuántas fichas estoy metiendo (inserta 8 fichas).	(Josué observa en silencio).
¿Cuántas fichas hay en la caja?	Ocho.
¿Cómo lo supiste?	Porque lo fui contando en mi cabeza, uno, dos, tres y así hasta el ocho.
Muy bien¿ Sabes qué número sirve para ocho (señalando las tarjetas con numerales)¿	Este (elige el pertinente).
Bueno, ahora mira cómo sigue la caja. (Inserta 4 fichas) .	Pusiste cuatro, este es el cuatro (elige la tarjeta correspondiente).
Bueno, y ahora ¿cuántas fichas hay dentro de la caja?	Déjame ver… esta es el ocho y lo pongo aquí (frente a si) entonces ahora cuatro (señalando la tarjeta) y entonces… digo ocho (señalando la tarjeta correspondiente) y ahora pongo cuatro (muestra cuatro dedos en una mano que pone sobre la tarjeta con el numeral "4") ocho (señala la tarjeta con "8"), nueve, diez, once y doce (contando cada uno de los dedos). Son doce.

Respuestas como las de Josué se presentaron en un 23% de los casos. El resto presentaron estrategias en las que el conteo podía iniciar desde uno haciendo alusión a los momentos representados en las tarjetas (61%), o bien hacer uso de hechos numéricos (sólo el 16%). Resulta pertinente señalar que cuando los niños resolvían la tarea, en ausencia de soporte escrito, operando los numerales involucrados en los momentos de la transformación (6.6% de las respuestas), siempre lo hicieron a través del conteo de cada uno de los elementos insertados en la caja. Nótese también que las estrategias de solución más avanzadas para la tarea, se dieron en presencia de numerales gráficos.

COMENTARIOS FINALES

Los datos hasta aquí mostrados sugieren que la presencia de notaciones convencionales constituye en efecto un foco importante de atención para los niños y puede servirles para resolver una tarea aditiva simple. La presencia de numerales escritos ayudó a los niños a redimensionar la tarea haciéndoles más evidente la necesidad de operar con los numerales involucrados en los problemas, al menos a nivel de conteo, para dar un resultado final en el que incluyeran cantidades presentadas en los dos momentos de transformación de las cantidades.

La utilidad de las notaciones convencionales se dio a pesar de que los niños de la muestra no fueran conservadores de la cantidad y, probablemente dada su edad y las consecuentes expectativas didácticas de su nivel escolar, les resultaba novedosa la tarea en la que participaron. En este sentido observamos que la presencia de notaciones numéricas convencionales les ayudó a organizar mejor sus estrategias de solución de los problemas, e inclusive algunos de ellos pudieron desplegar estrategias avanzadas como lo fue hacer uso de hechos numéricos.

Sin duda nos siguen quedando muchas interrogantes pendientes que nos lleven a precisar qué pasaría si expusiéramos a niños en condiciones similares a problemas aditivos más complejos, ¿seguirían siendo útiles las notaciones convencionales?; nos preguntamos también qué pasaría si diéramos cabida a la realización de notaciones espontáneas de los niños, ¿favorecería la realización de tareas de este tipo tanto como las notaciones convencionales? Finalmente, ¿qué relación existe entre las estrategias que desplegaron los niños para la solución de los problemas aditivos que involucraban ya operar sobre las cantidades y la conservación de la cantidad?, es decir, ¿sería posible que tareas como las que empleamos apoyados en notaciones convencionales, favorezcan el desarrollo del sentido de la cardinalidad de los niños?

* Universidad Autónoma de Querétaro.
** Universidad Marista de Querétaro.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARADO, M. (2005) *Pistas útiles para la escritura de números. Informe de Investigación*, México: CIPE-UAQ.

ALVARADO, M. & FERREIRO, E. (2002) Four and Five – year old children writing two – digit numbers. *Rivista di Psicolinguistica Applicata*. 23 –37.

BRIZUELA, B. (2004) *Mathematical development in Young Children. Exploring notations*. New York: Teachers College Press.

BROITMAN, C. (1998a). Enseñar a resolver problemas en los primeros grados. Propuestas didácticas para trabajar en el aula. Revista En la escuela, núm. 25.

_________, C. (1998b). La suma y la resta en los primeros grados. Propuestas didácticas para trabajar en el aula. Revista En la escuela. Año 111, núm. 26.

CARPENTER, T. & MOSER (1982). Addittion and Subtraction: A cognitive perspective. USA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

DENVIR, B. & BROWN, M. (1981) Number operations. In K. Hart (Ed) *Children's Understanding of Mathematics*. London: John Murray.

FUSON, K. (1991) Relations entre comptage et cardinalité chez les enfants de 2 à 8 ans. En: Bideaud, Meljac y Fischer (sous la dir. de), *Les Chemins du nombre Lille*: Presses Universitaires de Lille.

GRAY, E. (1997) Compressing the counting process: developing flexible interpretation of symbols, in I. Thompson (Ed) *Teaching and Learning Ealy Number*. Buckingham: Open University Press.

GRAY, E. (1991). An Analysis od diverging approaches to simple arithmetic: Preference and its consequences. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 551 – 574.

GRECO, P. (1962) Quotité et quantité. In Piaget (Ed.), *Strectures numériques élémentaires*. Paris: Presses Universitaires de France.

HIEBERT, J. & CARPENTER, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65– 97). New York: Macmillan.

KARMILOFF-SMITH, A (1994). *Más allá de la modularidad*. Madrid: Alianza (original publicado en 1992)

LIPTON, J. & SPELKE, E. (2004). Preschool children's master the logic of number word meanings. *Cognition*, 98, 57-66.

LIPTON, J. & SPELKE, E. (2005). Preschool children's mapping of number words to nonsymbolic numerosities. *Child Development*, 76, No. 5, 978-988.

MARTÍ, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En Andersen, Scheuer, Pérez & Teubal (Eds.) *Representational Systems and Practices as Learning Tools*. Rotterdam: Sense Publishers. 133-148.

PIAGET, J. y SZEMINSKA, A. (1967). *La génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe (publicación original, 1941).

SARNECKA, B.; GELMAN, S. (2004). Six does not just mean a lot: preschoolers see number words as specific, *Cognition* 92, 329-352.

THOMPSON, I. (1995) The role of counting in the idiosyncratic mental calculation algorithms of young children. European Early Childhood Education Research Journal, 3, pp. 5-16.

TOLCHINSKY, L. (2003). *The cradle of culture*. London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

VERGNAUD, G. (1982). A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In Carpenter, T., Moser, J., Romberg, T. (eds.) *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. New Jersey: Lawrenece Erlbaum Associates.