Explicar en la clase de Matemáticas, un desafío que los niños enfrentan con placer

PATRICIA SADOVSKY

EXPLICAR, UNA PRÁCTICA SOCIAL

Explicar en la clase de matemáticas. Que los chicos expliquen. Que argumenten. Que puedan encadenar las razones que validan sus procedimientos, sus resultados, sus conjeturas. Que se encuentren con los fundamentos del trabajo que realizan. Que desentrañen la lógica interna de las situaciones a las que se les convoca. Que toquen la raíz. Que se sientan con capacidad –con libertad, con autoridad– para intervenir sobre el conocimiento. Que produzcan ideas usando ideas.

Como toda disciplina, el trabajo con la matemática ofrece un modo específico de construir una relación con la verdad. Radica ahí, desde nuestro punto de vista, un aspecto central de su valor formativo. Y en esa construcción la producción de explicaciones por parte de los alumnos resulta un aspecto ineludible. Lejos de ser una adquisición espontánea y lejos también de ser un asunto que los docentes pueden enseñar declarativamente, lograr que los niños expliquen –que encaden deductivamente sentencias para validar el trabajo que van realizando– será el resultado de invitarlos a participar de manera sostenida de un escenario en el que explicar sea una práctica cotidiana. Un escenario en el que la actividad matemática misma sea el objeto de enseñanza.

La perspectiva de considerar como objeto de enseñanza la actividad matemática, puede ubicarse en una idea más amplia que es la de concebir siempre el aprendizaje con relación a la actividad que produjo aquello que se debe aprender. Citemos a Charlot, un investigador y pedagogo francés que habita Brasil y que ha trabajado muy intensamente la cuestión de la relación con el saber:

> *Aprender é uma relação entre duas atividades: a atividade humana que produziu aquilo que se deve aprender e a atividade na qual o sujeito que aprende se engaja – sendo a mediação entre ambas assegurada pela atividade daquele que ensina ou forma. Em termos simples: para apropiar-se de um saber, é preciso introduzir-se nas relações que permitiram produzi-lo. O essencial não é repetir a própria atividade humana, tal como ela ocorre ou ocorreu, mas adotar, durante a atividade de aprendizagem, a postura (relação com o mundo, com o outro e consigo) que corresponde a essa atividade humana. Esta é uma condição necessária, mas não suficiente: é preciso, a partir dessa postura, dominar as operações específicas de tal atividade aquelas que constituem sua normatividade. Por outro lado, o processo pode ser invertido: o domínio progressivo das operações permite, pouco a pouco, assumir a postura.*[1]

La cita de Charlot nos sumerge en el complejo problema de la construcción de normas del trabajo matemático –nos ocuparemos parcialmente de este problema a lo largo del artículo– y nos ayuda a tomar conciencia de la relación de mutuo condicionamiento entre dicha construcción y la posibilidad de *ir comprendiendo* algunas características fundamentales de la actividad matemática.

Tomando esta idea y asumiendo que la resolución de problemas constituye el motor de las elaboraciones matemáticas señalemos algunos aspectos que recortamos de nuestra interpretación de la disciplina que consideramos relevantes para construir un marco para pensar el trabajo del aula desde esta perspectiva:

- 1. La Matemática es un producto cultural y social.
- 2. Los conocimientos matemáticos no pueden concebirse sin los elementos de control que regulan la actividad que los pone en juego (Brousseau, G (1986); Balacheff, N. (2000); Campos Lins, R. (2000)).[2]
- 3. Los conocimientos son tales en tanto se caracterizan por sus relaciones con otros conceptos de su mismo campo teórico y no como objetos en sí mismos. (García, R. (2000)).[3]

1. La matemática es una *producción cultural*, porque sus elaboraciones están permeadas en cada momento por las concepciones de la sociedad en la que emergen, y condicionan aquello que la comunidad de matemáticos concibe en cada momento como posible y como relevante. El análisis histórico es rico en episodios al respecto y, a modo de ejemplo, tomemos el caso de las fracciones. Durante el período griego las razones de números naturales no eran consideradas números sino justamente razones –relaciones– en tanto que hoy los niños nacen en una cultura en la que las razones de números naturales *son* números y su esfuerzo se concentra en adaptarse a esta *imposición cultural*. Esto hace que la complejidad que supone concebir un cociente como un número quede oculta en un funcionamiento naturalizado por la sociedad. La matemática es también un *producto social*, porque es el resultado de la interacción entre personas que se reconocen como pertenecientes a una misma comunidad. Las respuestas que plantean unos, dan lugar a nuevos problemas que visualizan otros, las demostraciones que se producen se validan según las reglas que se aceptan en cierto momento en la comunidad matemática. Son reglas que se van transformando en función de los conocimientos y de las herramientas disponibles.
2. Imbricar los elementos de control con el conocimiento implica afirmar que las validaciones, las justificaciones que se puedan hacer en cada momento acerca de la producción matemática son constitutivas de los conceptos con los que se trabaja. En otros términos, una idea es tal, si hay un modo de explicarla. Nos apoyaremos en esta perspectiva para mostrar en qué sentido las explicaciones que los niños puedan producir modifican las conceptualizaciones que puedan hacer sobre un cierto asunto.
3. Los conceptos no funcionan aisladamente sino en una red, en una organización teórica, asociada a un tipo de problemas para los cuales las relaciones que se han estudiado, las escrituras cuyo uso se ha analizado y los problemas anteriormente resueltos resultan referencias que van constituyendo en cada momento una trama para el presente.

Revisemos un poco las condiciones planteadas y pensémoslas de cara al proyecto de concebir que nuestro objeto de enseñanza sea la actividad matemática en tanto actividad humana.

Esto nos lleva a concebir el trabajo matemático de la clase como la construcción colectiva de una cultura que se va elaborando a medida que un grupo de alumnos conducidos por un docente que regula el trabajo teniendo como doble referencia la cultura de su clase y la cultura matemática, enfrentan problemas, conciben diferentes formas de abordarlos y discuten alrededor de las mismas, generan nuevos problemas a partir de las resoluciones planteadas, se preguntan por el alcance de las relaciones producidas, las vinculan con otras ya elaboradas, exploran, formulan conjeturas, deducen, explican, aceptan argumentos o se oponen a ellos apoyándose en sus propias fundamentaciones…

Si analizamos este conjunto de actividades vemos que muchas de ellas suponen un plano reflexivo que toma como objeto la realización de otras. ¿Qué queremos decir? Los alumnos enfrentan problemas y para ello ponen en juego diferentes estrategias, a veces convergentes otras no tanto. La puesta en relación de esas estrategias constituye ya un plano reflexivo sobre la resolución de problemas y puede ser fuente de nuevos problemas. Del mismo modo, el preguntarse por el alcance de las relaciones producidas, la aceptación o no de argumentos son actividades inherentemente sociales en las que los alumnos toman como objeto de discusión y de trabajo, su propio trabajo. Es en este terreno donde ubicamos la cuestión de las explicaciones en la clase: en el terreno de la reflexión sobre la acción.

Ahora bien, explicar en matemática tiene una especificidad que debe ser objeto de aprendizaje (y en algún sentido de enseñanza). En otros términos, producir explicaciones matemáticamente pertinentes, lograr encadenar deductivamente relaciones matemáticas para producir nuevas relaciones no es una adquisición espontánea de los alumnos, es producto de un trabajo intencional. En este sentido, entendemos que la elaboración de explicaciones por parte de los alumnos es un proceso en el cual el tipo de explicación que ellos sean capaces de producir va evolucionando. Digamos además que entender qué es una explicación matemáticamente pertinente y qué no, es una cuestión compleja. No hay una norma clara contra la cual contrastar para "controlar" las explicaciones. En este sentido las interacciones en la clase son sostén, regulador y motor de la producción de explicaciones. Es claro que el papel del docente en este juego es esencial.

¿Qué queremos decir cuando planteamos que es difícil muchas veces para los alumnos entender qué es una explicación matemáticamente pertinente? Veamos un ejemplo:

Nos ubicamos en un 5º grado. Los alumnos tenían una tarea:

Encontrar una fracción que se ubique entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$

Un alumno propone $\frac{2}{3}$, respuesta "correcta".

Cuando explica por qué dice: "el 2, que es el numerador está entre 1 y 3 y el 3 que es el denominador está entre 2 y 4"

O sea, la respuesta – $\frac{2}{3}$ – es correcta, pero la explicación no es válida. Cuando el docente, acepta la respuesta $\frac{2}{3}$ pero intenta refutar el argumento y para ello le propone como contraejemplo las fracciones

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{5} \text{ y } \frac{5}{7}$$

En las que 4 está entre 2 y 5 y 5 entre 3 y 7 pero no se cumple que $\frac{4}{5}$ está entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$, el alumno responde:

en tu ejemplo no, pero acá (señalando el caso anterior) *sí es válido*.

El ejemplo nos permite introducir varias cuestiones:

a. La "explicación" que propone el alumno yuxtapone dos hechos verdaderos que no están encadenados lógicamente. Es decir:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad 1 < 2 < 3 \text{ y } 2 < 3 < 4$$

Sin embargo el segundo hecho no explica el primero, es decir no se deduce del hecho de que 2 está entre 1 y 3 y 3 está entre 2 y 4, el hecho de que $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$. En otros términos, de $1 < 2 < 3$ y $2 < 3 < 4$ no se deduce *necesariamente que* $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

O sea, el carácter de necesidad típico de una explicación matemática, no está presente en esta explicación. En otros términos, *verdad y razones de la verdad* no son aspectos necesariamente ligados y parte sustancial del trabajo en matemática es el acceso a las razones de la verdad. Se ve acá una tendencia intelectual señalada por Piaget (1924)[4] que es la de yuxtaposición, es decir *ausencia de necesidad en el pensamiento*.

b. Cuando el alumno afirma que en su ejemplo el argumento es válido, está mostrando que para él la explicación no tiene por qué tener un *carácter universal*. Es decir no tiene por qué abarcar todos los casos posibles.

c. La regla que está usando para comprar fracciones, no le permite anticipar cualquier comparación de fracciones. En este sentido, su explicación no tiene un carácter anticipatorio, es decir, frente a otro caso, la regla no será suficiente para establecer la comparación.

Estos tres componentes, el carácter *necesario, universal y anticipatorio* son elementos de una explicación matemática que los alumnos deberán ir elaborando como parte de su trabajo en la clase.

Ahora bien, ¿cómo accede el alumno a entender el funcionamiento de estos aspectos? Obviamente no es posible explicitar estas cuestiones, explicárselas a un niño de enseñanza fundamental. Es *como resultado de participar en una práctica social en la que las explicaciones forman parte de los intercambios en una clase*, que los alumnos irán elaborando a lo largo del tiempo, explicaciones cada vez más pertinentes. En la medida en que los otros –los compañeros– regulados por el docente, acepten o refuten los argumentos y en la medida en que el alumno escuche otros argumentos posibles, irá comprendiendo que la explicación es fuente de nuevos conocimientos acerca de los objetos y de las relaciones a los cuales se refiere la explicación (en este caso las fracciones). A su vez, este posicionamiento requiere que el docente acepte que tal vez no sea el momento en que se produce una explicación no válida, el momento en que el alumno la podrá revisar. *El largo plazo es constitutivo de la elaboración de una racionalidad matemática*.

Retomemos el ejemplo para señalar que cuando el alumno ofrece esa explicación está mostrando que analiza los numeradores y los denominadores de manera independiente. O sea, la explicación que ofrece el alumno, muestra un aspecto del modo en que está conceptualizando las fracciones que la sola acción de ordenar, no deja aflorar. En otros términos *la explicación muestra un aspecto del contenido, que la acción no muestra*.

Los elementos esbozados hasta ahora nos permiten realizar la siguiente síntesis:

- 1. La producción de explicaciones supone ubicar a los alumnos en un posicionamiento de reflexión sobre el trabajo matemático. Este posicionamiento es fundamental en la constitución de un sujeto autónomo e intelectualmente responsable. La producción de explicaciones está ligada a la libertad de hablar, opinar e inventar sobre el asunto que se está estudiando.
- 2. La dimensión social es inherente a la producción de explicaciones en una clase. Es en el intercambio, en la posibilidad de escuchar otras explicaciones, en la receptividad que tienen las propias explicaciones en los otros, en las regulaciones que gestiona el docente que se va elaborando un sentido de la explicación en matemática. Estas explicaciones están en función de comprender mejor, de convencerse de la verdad y de convencer a los demás. En la medida en que la producción de explicaciones supone resolver los conflictos con relación al conocimiento a través de la palabra, aprender a argumentar, es también a participar de una práctica democrática. La producción de explicaciones en la clase tiene entonces un sentido formativo esencial con relación a la constitución de un sujeto –y de una sociedad– democrática.
- 3. La producción de explicaciones interviene en la comprensión de las estrategias y de los recursos que se usan para dar por válida una cuestión. O sea interviene en el plano de la racionalidad matemática.
- 4. La producción de explicaciones interviene en la conceptualización de los objetos a los que se refiere dicha explicación.

Autonomía intelectual, ejercicio de la democracia, construcción de una racionalidad matemática y profundización de la conceptualización son aspectos que nos ayudan a entender en qué sentido el trabajo en matemática contribuye a la formación de un ciudadano crítico.

LA PRODUCCIÓN DE ARGUMENTOS Y LA ELABORACIÓN DE NUEVAS RELACIONES

Nos proponemos ahora mostrar a través de un ejemplo en qué sentido la apelación a que los niños elaboren argumentos para sostener la verdad de una proposición los confronta con la necesidad de producir relaciones nuevas, algunas de la cuales no han sido históricamente reconocidas como parte del repertorio establecido cuando se trata un cierto tema conceptual en la enseñanza fundamental.

La situación que relataremos a continuación fue tomada y reelaborada a partir de una secuencia del grupo ERMEL[5] en el marco de un trabajo centrado en la problemática didáctica de entrada de los alumnos en la argumentación.

Hemos trabajado con alumnos de 5º grado sobre modos de reconocer si un número es o no divisible por 4. Los niños habían trabajado cuestiones de división entera, habían analizado regularidades de la tabla pitagórica apelando a propiedades de la multiplicación, tenían una práctica sostenida de cálculo mental a partir de la cual proponían estrategias originales tanto para la multiplicación como para la división y habían estudiado formas de reconocer si un número es divisible por 2 y por 5.

Invitamos a los niños a pensar cómo reconocer *sin efectuar la división por 4, si* un número es múltiplo de 4. El escenario planteado fue el siguiente:

- En un primer momento los chicos le decían números a la maestra y ella inmediatamente decía si el número era o no un múltiplo de 4. La intención era mostrar que la maestra tenía una manera de saber sin hacer la cuenta. Los niños comprobaban con la calculadora si la maestra había "adivinado";
- En un segundo momento se les planteaba a los alumnos que imaginaran que se prolongaba indefinidamente la tabla del 4. Ellos tenían que encontrar un modo de saber sin hacer la cuenta si un número dado está o no en la tabla del 4 prolongada.

No estábamos esperando que los alumnos produjeran el criterio convencional para reconocer si un número es o no divisible por 4 (fijarse en las dos últimas cifras), queríamos que produjeran relaciones que les permitieran hacer esa anticipación. La propuesta era que, frente a los números que la maestra dijera, ellos tenían que decidir si estaban o no en la tabla del 4 prolongada y explicar cómo lo sabían. O sea, tenían que producir relaciones que permitieran anticipar si el resto de la división de un número por 4 sería o no 0.

En la segunda etapa la maestra decide proponer números entre 50 y 100:

47, 80, 84, 96, 74, 70, 92

Hemos organizado los argumentos que los niños propusieron en tres clases: aditivos, multiplicativos y basados en el sistema de numeración.

- Ejemplos de argumentos aditivos

96 es múltiplo de 4 porque se puede pensar como 80 + 16, que están en la tabla del 4.

La relación que subyace a este argumento es que la suma de dos múltiplos de 4 es un múltiplo de 4. La misma es producida por los alumnos frente a la necesidad de decidir y argumentar. En este sentido decimos que la situación de exigir la producción de un argumento da lugar a la emergencia de relaciones que no serían necesarias si sólo se trabajara con el enunciado del criterio de divisibilidad por 4. Aunque el análisis de la suma de múltiplos no es un tema usualmente trabajado a esta altura de la escolaridad emerge en la clase frente a la tarea de argumentar.

74 no es múltiplo de 4 porque 74 = 40 + 34 y 34 no es múltiplo de 4.

De manera análoga que en el ejemplo anterior, en este caso la relación que sostiene el argumento es que la suma de un múltiplo de 4 más un número que no es múltiplo de 4 da como resultado un número que no es múltiplo de 4. La producción del argumento hace posible discutir con toda la clase la validez de la propiedad.

144 no es múltiplo de 4 porque es 70 + 74 y ninguno de los dos son múltiplos de 4.

Frente a esta producción algunos niños refutaron la propuesta sosteniendo que 144 es múltiplo de 4 porque puede pensarse como 72 + 72 que son múltiplos de 4.

Este argumento da lugar a discutir la verdad o falsedad de la siguiente afirmación: la suma de dos números que no son múltiplos de 4 no es múltiplo de 4. Los alumnos exploran, proponen diferentes ejemplos, investigan hasta llegar a la conclusión de que la proposición es falsa.

- Un ejemplo de argumento multiplicativo:

96 es múltiplo de 4 porque 96 = 4 x 24

La relación subyacente en este caso es que si un número se puede expresar como 4 multiplicado por otro número, resulta múltiplo de 4. Otros alumnos han planteado que

96 es múltiplo de 4 porque lo puedo dividir por 2 y el resultado es 48 que también lo puedo dividir por 2.

Notemos que para estos alumnos es claro que dividir por 4 es equivalente a dividir sucesivamente por 2, 2 veces. Frente a este argumento, algunos compañeros propusieron:

Es suficiente dividir una vez por 2 y ver si el resultado es par, no hace falta volver a dividir.

Este último argumento se produce en interacción con el anterior, es decir, es el resultado del intento de algunos alumnos de ajustar la idea propuesta por un compañero. Nuevamente, es una relación cuya emergencia *necesita* de otra relación ya planteada en la clase. Es la posición de análisis crítico del trabajo de otro alumno la que lleva a producir esta relación, análisis que probablemente no tendría lugar de la misma manera si la proposición proviniera del docente.

- Un ejemplo de argumento basado en el sistema de numeración:

Un niño propone que

84 es múltiplo de 4 porque 8 + 4 = 12 que es múltiplo de 4.

Nos encontramos aquí en la situación comentada anteriormente a raíz de las fracciones: hay dos proposiciones verdaderas (84 es múltiplo de 4 y 8+4 = 12 que es múltiplo de 4) pero el encadenamiento que hace el alumno no es válido. Cuando se somete a la opinión de la clase, algunos alumnos proponen contraejemplos:

En 22, 2+2 = 4 y no es múltiplo de 4
En 75, 7 + 5 = 12 y 75 no es múltiplo de 4

Al discutir estos ejemplos se establece en la clase que sumar las cifras de un número y analizar el resultado no permite decidir si el número es o no múltiplo de 4.

El análisis de las clases nos permite establecer que frente a los disensos, los alumnos potencian sus capacidades argumentativas al enfrentar la necesidad de convencer a sus compañeros en una situación auténtica de debate. Al mismo tiempo los argumentos que proponen profundizan la comprensión que tienen de las relaciones de divisibilidad, dando lugar a la producción de diferentes propiedades que son el punto de apoyo para convencer a los otros.

Notemos finalmente que las mismas relaciones que los alumnos han utilizado para decidir si un número es múltiplo de 4 podrían utilizarse para establecer cuál es el resto de ese número en la división por 4. La explicación "junta" dos problemas (decidir si un número es múltiplo de 4 y decidir el resto de un número en la división por 4) que sin ella parecen distantes. Vemos entonces que al elaborar argumentos se hacen visibles relaciones que la sola enunciación no permite reconocer.

Queremos terminar este artículo recuperando el valor formativo de la práctica de la argumentación: apoyarse en el conocimiento para analizar el propio trabajo, para convencer a los otros, para comprender más profundamente las ideas en juego. La reflexión de Guy Brousseau que proponemos a continuación sintetiza nuestra ambición de concebir –también– la clase de matemática como un espacio para el despliegue de la práctica democrática:

No se trata sólo de enseñar los rudimentos de una técnica, ni siquiera los fundamentos de una cultura científica; las matemáticas en este nivel son el primer dominio en que los niños pueden aprender los rudimentos de la gestión individual y social de la verdad. Aprenden en él – o deberían aprender en él– no sólo los fundamentos de su actividad cognitiva, sino también las reglas sociales del debate y de la toma de decisiones pertinentes:

Cómo convencer respetando al interlocutor; cómo dejarse convencer contra su deseo o su interés; cómo renunciar a la autoridad, a la seducción, a la retórica, a la forma, para compartir lo que será una verdad común; de qué depende el uso que los otros hacen de sus conocimientos y de la manera en que tratan estos problemas de verdad (...)

Soy de los que piensan que la educación matemática es necesaria para la cultura de una sociedad que quiere ser una democracia.

La enseñanza de la matemática no tiene el monopolio ni del pensamiento racional ni de la lógica ni de ninguna verdad intelectual, pero es un lugar privilegiado para su desarrollo precoz. GUY BROUSSEAU (1990)[6]

1. Charlot, B. (2001) Os Jovens e o Saber. Perspectivas mundiais. Porto Alegre, Artmed Editora.

2. Brousseau, G.; (1986) Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.
Balacheff, N.; (2000) Symbolic Arithmetic vs Algebra, en Sutherland, R.; Rojano, T.; Bell, A.; Lins, R.; (Eds) Perspectives on School Algebra. Kluwer Academic Publishers.
Campos Lins R.;(2000) The Production of Meaning for Algebra: a perspective based on a Theoretical Model of Semantic Fields, en Sutherland, R.; Rojano, T.; Bell, A.; Lins, R.; (Eds) Perspectives on School Algebra. Kluwer Academic Publishers.

3. García, R.; (2000) El conocimiento en construcción. De las formulaciones de Jean Piaget a la teoría de sistemas complejos. Barcelona, Gedisa editorial.

4. Piaget, J. (1924) Le jugement et le raisonnement chez l'enfant, Delachaux et Niestlé, 1993.

5. ERMEL (Équipe de recherche mathématiques à l'école élémentaire) (1999). Vrai?...Faux?.. On en débat!. De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3. Institut national de recherche pédagogique, Paris.

6. Brousseau, G. (1990) ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de la matemática (primera parte). Enseñanza de las Ciencias (8.3), Barcelona.